PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Khái niệm cơ bản

1.1.1. Định nghĩa hàm 2 biến, hàm nhiều biến, tập xác định, tập giá trị, đồ thị

Trong giải tích 1chúng ta đã nghiên cứu các vấn đề của hàm số một biến, tuy nhiên trong thực tế chúng ta thường phải xét các hàm phụ thuộc nhiều biến độc lập. Ví dụ ta gọi nhiệt độ đo được tại điểm (x,y,z) trong một căn phòng là f, rõ ràng nhiệt độ f phụ thuộc vào x, y, z và ta viết $f=f(x,y,z)$; tuy nhiên các thời điểm khác nhau nhiệt độ tại cùng một điểm cũng khác nhau, vậy f cũng phụ thuộc vào thời gian t, nên $f=f(x,y,z,t)$... và cứ như vậy f có thể phụ thuộc nhiều biến khác nhau.

Chương này chúng ta tìm hiểu các khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến.

Định nghĩa 1.1.

Cho X là tập con của $\mathbb{R}^n$, ánh xạ

$$f: X \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

được gọi là hàm n biến xác định trên X.

Như vậy một hàm n biến xác định trên X là một phép tương ứng: cho ứng mỗi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ với một số thực xác định mà ta ký hiệu là $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ví dụ 1.1: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 1 + x + y + z$, rõ ràng với hàm f xác định như trên, ta có $f(1,2,3)=1+1+2+3=7$. Để đơn giản ta thường viết cho hàm

$f(x,y,z)=1+x+y+z$.

Khi $n=2$, ta có hàm hai biến với X là tập con của $\mathbb{R}^2$ và

$$f: X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

là hàm 2 biến xác định trên X.

Các khái niệm sau đây ta xét trên hàm hai biến, với các hàm số biến lớn hơn 2 được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Tập xác định: Là tập con của $\mathbb{R}^2$ làm cho hàm số có nghĩa.

Tập giá trị: $T = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y)=z\}$.

Ví dụ 1.2:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$$

Tập xác định $X= \mathbb{R}^2$, tập giá trị $T= \mathbb{R}$ vì mọi $z \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $z=x+y$.

Ví dụ 1.3:

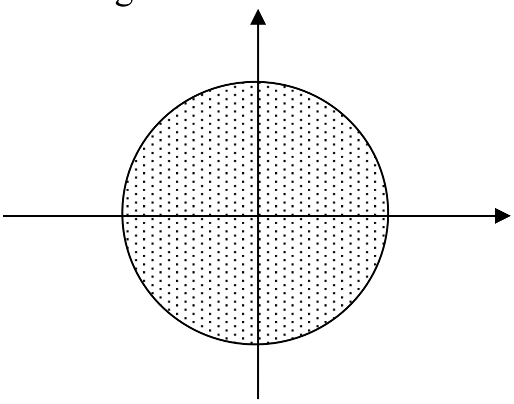
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Tập xác định $X=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$, vậy X chính là góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng Oxy; tập giá trị $T= \mathbb{R}^+$ vì mọi $z \in \mathbb{R}^+$ đều tồn tại $(x,y) \in X$ sao cho $z=x+y$.

Ví dụ 1.4:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Tập xác định $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$, chính là hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng 1.



Hình 1.1

Tập giá trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, vậy T={z∈ ℝ| z≥0}.

Đồ thị của hàm hai biến

Hàm điểm

Xét hàm số f: $(x,y) \mapsto f(x,y)$.

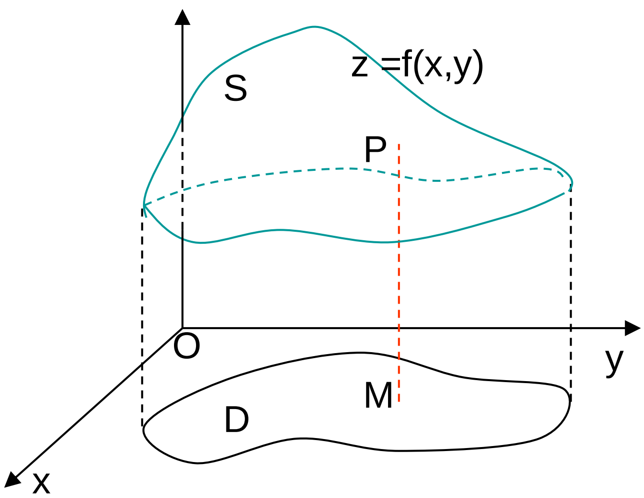
Với mỗi cặp số thực (x,y) xác định một điểm $M(x,y)$ trong không gian hai chiều Oxy nên ta có thể xem hàm 2 biến $f(x,y)$ là hàm của điểm $M(x,y)$:

$$f: M \mapsto f(M)$$

Với mỗi điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng Oxy qua hàm f ứng với 1 điểm $P(x,y,z)$ trong không gian 3 chiều với $z = f(x,y)$.

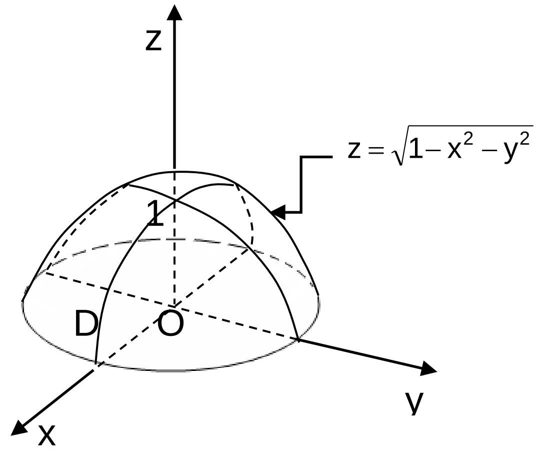
Tập các điểm P khi M chạy trong D gọi là đồ thị của hàm số $z=f(x,y)$ xác định trên D, thường được ký hiệu *grapf* với

$$grapf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}.$$



Hình 1.2

Ví dụ 1.5: Đồ thị hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là nửa mặt cầu tâm O, bán kính bằng 1 nằm về phía $z \geq 0$.

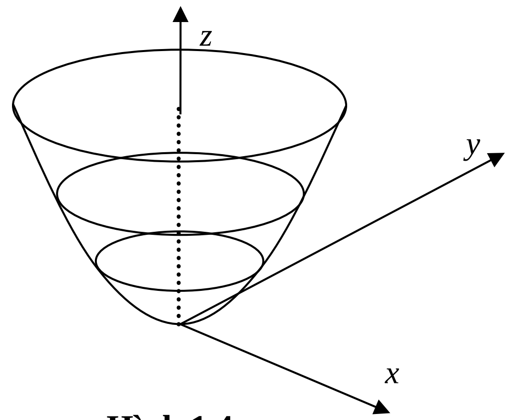


Hình 1.3

Ví dụ 1.6:

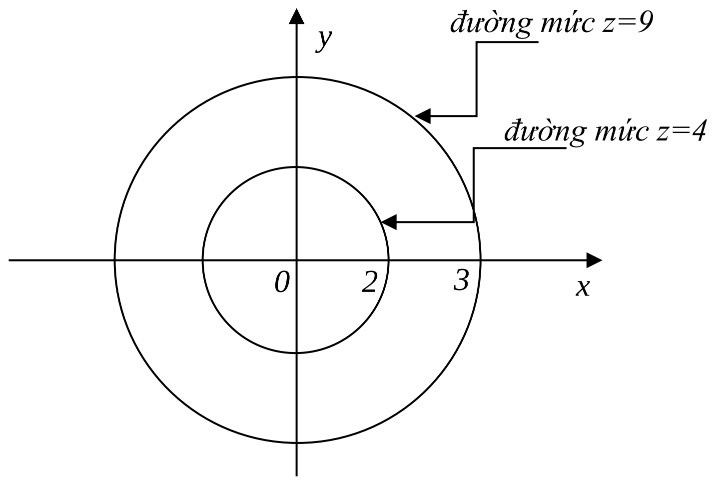
Cho hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$grapf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$ là một paraboloid tròn xoay.



Hình 1.4

Khi cho z=C>0 ta có $x^2 + y^2 = C$ là một đường tròn tâm 0, bán kính $\sqrt{C}$ được gọi là *đường mức* (giống như đường bình độ trong bản đồ quân sự) tương ứng *z=C*, với các đường mức ta có thể hình dung *hình dáng* của đồ thị trong không gian 3 chiều.



Hình 1.5

Với hàm n biến ($n \geq 3$) $D \subset R^n$, f: $D \rightarrow R$ có

$$grapf = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} | z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

được biểu diễn trong không gian $n+1$ chiều, trong thực tế không gian với số chiều lớn hơn hoặc bằng 4 không thể mô tả hình học được, nên thường các bài toán trong các trường hợp này chỉ "*giải quyết*" theo cách hoàn toàn giải tích.

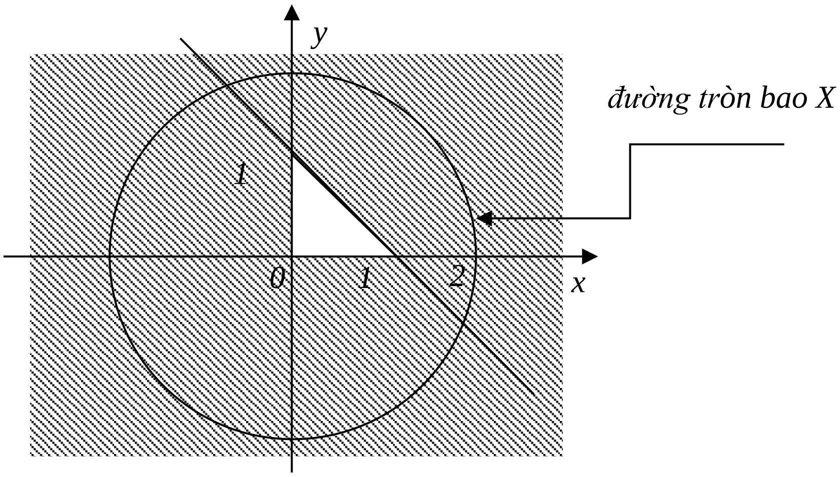
Chú ý:

- Hàm n biến ($n \geq 3$) cũng được xem là hàm điểm.
- Các định nghĩa về lân cận, tập đóng, tập mở… tương tự các định nghĩa tương ứng của hàm 2 biến.
- Các định nghĩa về tổng, hiệu, tích, thương của 2 hàm, phép hợp các hàm n biến ($n \geq 2$) cũng tương tự các định nghĩa tương ứng của hàm 1 biến.

1.1.2. Sự hội tụ trong R, tập bị chặn, tập đóng, tập mở, điểm tụ, điểm trong, điểm ngoài, điểm biên, biên, lân cận.

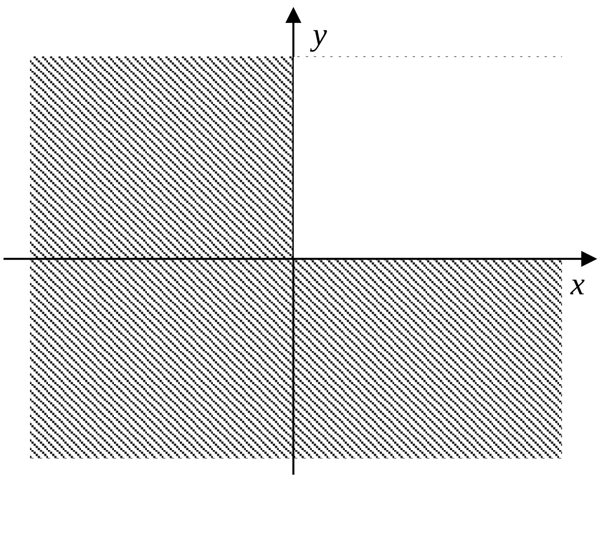
- Tập phẳng là tập các điểm cùng nằm trong 1 mặt phẳng.
- Một tập phẳng được gọi là giới nội (*bị chặn*) nếu tồn tại hình tròn chứa nó.

Ví dụ 1.7: Tập $X=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 |\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$ là tập giới nội.



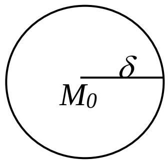
Hình 1.6

Ví dụ 1.8: Tập $X=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 |\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ là tập không giới nội.



Hình 1.7

δ - lân cận của điểm M_o trong mặt phẳng là tập tất cả những điểm M của mặt phẳng sao cho khoảng cách từ M đến M_o: $d(Mo, M) < \delta$. (là phần trong của hình tròn tâm M_0, bán kính δ). *δ - lân cận* của điểm M_o trong không gian *n* chiều là phần trong của quả cầu tâm M_0, bán kính δ.



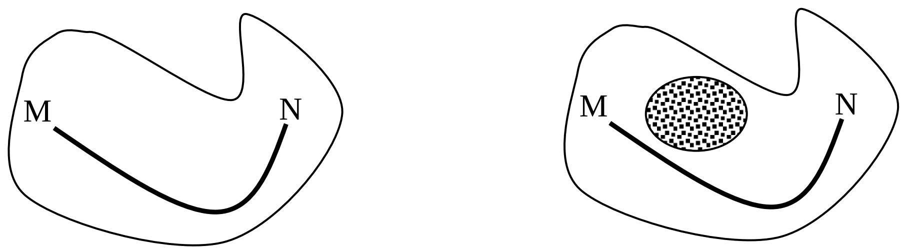
Hình 1.8

- *Lân cận của* M_o là tập hợp chứa một δ - lân cân nào đó của M_o.
- *Điểm trong*: Điểm *T* của *E* được gọi là điểm trong của *E* nếu tồn tại một lân cận nào đó của nó nằm hoàn toàn trong *E*.
- *Điểm ngoài*: Điểm *N* được gọi là điểm ngoài của *E* nếu tồn tại một lân cận nào đó của nó hoàn toàn không chứa trong *E*.
- *Điểm biên*: Điểm *B* được gọi là điểm biên của E nếu mọi lân cận của nó vừa chứa những điểm trong của *E* và chứa những điểm ngoài thuộc *E*.
- *Biên*: Tập tất cả những điểm biên của E được gọi là biên của *E*.
- *Tập mở*: Tập *E* được gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.
- *Tập đóng*: Tập *E* được gọi là đóng (*kín*) nếu nó chứa mọi điểm biên của nó.
- *Tập compact*: Tập đóng, giới nội gọi là tập compact.
- *Tập liên thông*

Tập $E \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là liên thông nếu có thể nối 2 điểm bất kỳ *M, N* của nó bởi 1 đường liên tục nằm hoàn toàn trong *E*.

Tập liên thông được gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi 1 mặt kín, trong trường hợp không gian 2 chiều nó giới hạn bởi 1 đường cong kín.

Tập liên thông được gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín (trường hợp *n=2* giới hạn bởi các đường cong kín) rời nhau từng đôi một.



Tập liên thông đơn liên   Tập liên thông đa liên

Hình 1.9

Ví dụ 1.9:

Tập M={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x^2+y^2\leq 1$} là tập đóng, giới nội.
Tập N={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x^2+y^2<1$} là tập mở, giới nội.
Tập P={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x\geq 1$, $y\geq 1$} là tập đóng nhưng không giới nội.
Tập R={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x>1$, $y>1$} là tập mở, không giới nội.
Tập S={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x^2+y^2\leq 1$, $y>0$} là tập không đóng, không mở.
Tập U={$(x,y)\in \mathbb{R}^2$| $x^2+y^2\leq 1, x^2+y^2\geq 4$} là tập không liên thông.
(Cả hai tập M, N đều có biên là đường tròn $x^2+y^2=1$).

Bài tập:

Vẽ hình và phân tích các tập trong ví dụ 1.9.